数理解析研究所講究録
225巻 1975年 262-291



# 概均質ベクトル空間の特異軌道と$b$-関数

紘理 木村達雄 記

## §1. 準備（定義，その他）

$V$＝複素数体$\mathbb{C}$上の有限次元ベクトル空間（$\dim V = n$とする）

$G(\subset GL(V))$＝連結線型代数群　，とするとき

対$(G, V)$が概均質ベクトル空間（*Prehomogeneous vector space*，P.V.と略記する。）とは，$V$の代数的真部分集合$S$が存在して$G$が$V-S$に均質に作用していること，すなわち

$$V - S = G \cdot x \quad \text{for } x \in V .$$

このとき，$S$を$(G, V)$の特異点集合（*singular set*）とよび$S$に含まれる$G$-軌道（*orbit*）を$(G, V)$の特異軌道（*singular orbit*）という。　以下では次の仮定をする。

仮定：$G$は*reductive*で，$S$は既約超曲面

（この仮定を満す例として，既約正則概均質ベクトル空間の族があり分類ができている。この仮定を弱めた場合もある程度できているが，そのときは多変数の$b$-関数$b_\chi(\omega)$の考察が必要になる。）

さて仮定から$S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$なる既約多項式$f(x)$が存在するが，$S$が$G$-認容なことから　$f(x)$は$V$上の相対

不変多項式（relative invariant）であり，逆にV上の相対不変有理式は $cf^m$ $(c\in\mathbb{C}^*, m\in\mathbb{Z})$ に限る事がわかる。

$$f(g\cdot x)=\chi(g)f(x)\quad \text{for } \forall g\in G,\ x\in V.$$

fに対応する指標χの微分を $\delta\chi$ とする。すなわちGのリー環を $\mathfrak{g}$ とするとき

$$\chi(\exp tA)=\exp t\,\delta\chi(A)\quad \text{for } \forall t\in\mathbb{C}^\times,\ A\in\mathfrak{g}.$$

然らば

$$\delta\chi(A)=\frac{\deg f}{\dim V}\cdot \mathrm{tr}_V A\quad \text{for } \forall A\in\mathfrak{g}\tag{1.1}$$

が成り立つ。（[　],[　]参照）

注）$f(x)$ は斉次多項式である。

$V^*$（$=V$のdual space）には，群Gがcontragredientに作用するがGがreductiveであるから（$G, V^*$）もP.V.でかつそのsingular set $S^*$ も既約超曲面である。

$S^*=\{y\in V^* \mid f^*(y)=0\}$　とすれば

$f^*(g^*\cdot y)=\chi^{-1}(g)f^*(y)$　（$g\in G$, $y\in V^*$. $g$ の $V^*$ への作用を $g^*\cdot y$ と記す）が成り立つ.

$f^*(\mathrm{grad}_x)=f^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$　$(n=\dim V)$ なる微分作用素を $f(x)^{s+1}$ に作用させると，それはV上のcharacter $\chi^s$ に対応するrelative invariantになるから定数倍（sにdependするので $b(s)$ と記す）を除いて $f^s$ に一致する．　すなわち

$$f^*(\mathrm{grad}_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s\tag{1.2}$$

を得る.

この($s$に関する)多項式を$(G, V)$の$b$-関数，または$b$-多項式という。　$\deg b(s) = \deg f(x)$が成り立つ。

Singular orbits と$b(s)$の関係を研究し，$b(s)$を具体的に決定する方法を得るのが本論の目標である。

$$\mathcal{D} = V\text{上の}\overbrace{\text{differential}}^{\text{hol. func. 係数の}}\ \text{operators のなす sheaf}$$

$$\mathcal{D}[s] = \{ P(s,x,D) = \sum_{j=0}^{m} P_j(x,D) s^j \mid P_j \in \mathcal{D} \}$$

$$\mathcal{J} = \{ P(x,D) \in \mathcal{D} \mid P(x,D) f^s = 0 \}$$

$$\mathcal{J}[s] = \{ P(s,x,D) \mid P(s,x,D) f^s = 0 \}$$ とおく.

$f$の$b$-多項式$b(s)$が$(s+\alpha)$でわりきれる事を示すのには次の事がいえれば十分である.

すなわち$V$上の超関数$\Delta(x)$があって

1) $P(-\alpha, x, D)\Delta(x) = 0$ for $\forall P(s,x,D) \in \mathcal{J}[s]$

2) $f(x)\Delta(x) = 0$

3) $\Delta(x) \neq 0$.

実際 (1.2) より $\{ f^*(\mathrm{grad}_x) f(x) - b(s) \} f(x)^s = 0$

すなわち $f^*(\mathrm{grad}_x) f(x) - b(s) \in \mathcal{J}[s]$

従って 1) より $\{ f^*(\mathrm{grad}_x) f(x) - b(-\alpha) \} \Delta(x) = 0$

従って 2) より $b(-\alpha)\Delta(x) = 0$.　$b(-\alpha)$は定数ゆえ 3) より $b(-\alpha) = 0$ i.e. $(s+\alpha) \mid b(s)$ を得る.

ここで $\Delta(x)$ は 1), 2), 3) を満たせばよいわけで，実際には microfunction として扱う．

1) 2) 3) をみたす $\Delta(x)$ が存在するための条件をこれから調べていこう．

$f^s(gx) = \chi(g)^s f^s(x)$ において $g = \exp tA$ $(A \in \mathfrak{g})$ を代入して $t$ で微分して $t=0$ とおけば

(1.3) $\quad \langle Ax, \mathrm{grad} \rangle f(x)^s = s\,\delta\chi(A)\, f(x)^s$ を得る．

( $x = (x^1, \cdots, x^n)$ のとき $\langle Ax, \mathrm{grad} \rangle = \langle Ax, D \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ を意味する。但し $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(V)$ )

従って $\langle Ax, D \rangle - s\,\delta\chi(A) \in \mathcal{J}[s]$ が成り立つから 1) が成り立てば

1′) $\{ \langle Ax, D \rangle + \alpha\, \delta\chi(A) \} \Delta(x) = 0 \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}$

が成り立つ．(i.e. 1) $\Rightarrow$ 1′) )

ここで我々は次の二つの事を調べなくてはならない．

I) 如何なる条件のもとで 1) と 1′) が同値になるか？

II) 如何なる条件のもとで 1′) 2) 3) を満たす $\Delta(x)$ が存在するか？

その為にいくつかの概念を導入しよう．

$x_0 \in V$ に対し $V_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} T_{x_0}V / T_{x_0}G \cdot x_0 = V / \mathfrak{g} \cdot x_0$ を $x_0$ における normal vector space という．

$V_{x_0}$ には isotropy subgroup $G_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \{ g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0 \}$ が

作用する．　$V^*$ を $V$ の dual とするとき

$V^*_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \{ y \in V^* \mid \langle \mathfrak{g}\cdot x_0, y \rangle = 0 \}$ を $x_0$ における

conormal vector space という．　この空間にも $G_{x_0}$ が

(但し 反傾的に)作用する．

$T^*_{G\cdot x_0}V \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\{ (x, y) \in V \times V^* \mid x \in G\cdot x_0 ,\ y \in V^*_x \}}$ を

$x_0$ を通る orbit $G\cdot x_0$ の conormal bundle とよぶ．但し

$\overline{\phantom{x}}$ は $V \times V^*$ における Zariski-closure を表わす．

容易にわかるように

☆ $G$ が $T^*_{G\cdot x_0}V$ に概均質に作用する (i.e. Zariski-dense orbit が

同値 $\Updownarrow$ 存在する)

☆ $(G_{x_0}, V^*_{x_0})$ は P.V. である．

同値 $\Updownarrow$

☆ $T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0, y_0)}$ $(\exists y_0 \in V^*)$ ,　が成り立つ．

さて (1.3) において　$s=1$, $x \in V-S$ (i.e. $f(x) \neq 0$) とすれば

$$\langle Ax, \operatorname{grad}\log f(x) \rangle = \delta\chi(A) \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g}$$

が成り立つが，$(G, V)$ が概均質な事により $\mathfrak{g}\cdot x = V$ $(\overset{\text{各}}{x} \in V-S)$

従って　$\operatorname{grad}\log f(x) \in V^*$　と考えられる．　すなわち

(1.4)　　$V - S \xrightarrow{\operatorname{grad}\log f} V^*$　　である．

今　$V \times V^*$ の中の $(n+1)$ 次元の alg. subset $W$ を

$W \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\{ (x, \varepsilon \operatorname{grad}\log f(x)) \mid x \in V-S ,\ \varepsilon \in \mathbb{C}^\times \}} \subset V \times V^*$　と

定義する．　以上の定義のもとで I)，II) に対する解答は次のようになる．$x_0 \in V$ に対し

I) $\left\{\begin{array}{l} \text{i) } G \text{ が } T^*_{G\cdot x_0}V \text{ に概均質に作用する (i.e. } T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0, y_0)} \\ \qquad \text{for } \exists y_0 \in V^* \text{)} \\ \text{ii) } T^*_{G\cdot x_0}V \subset W \end{array}\right.$

の二条件が満されれば $(x_0, y_0)$ の近傍で（すなわち micro-local に考えて）1) と 1′) は同値になる．

II) $\dfrac{\mathrm{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ $(A \in \mathfrak{g}_{x_0})$ が $A \in \mathfrak{g}_{x_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid A \cdot x_0 = 0\}$ のとり方によらず一定ならば 1′) 2) 3) をみたす $\Delta(x)$ が存在する．但し $\alpha = \dfrac{\mathrm{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ （$\delta\chi(A) \neq 0$ とする．）

$x_0 \in V$ に対し orbit $G \cdot x_0$ が i) ii) の条件を満すとき 'good orbit' ということにする。

注）$x_0 \in V - S$ に対しては $\mathfrak{g}_{x_0}$ は ~~reductive~~ semi-simple になるから（仮定及び松島の定理！）$\delta\chi(A) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ である．よって $b(s)$ を調べるには singular orbit が重要である．

次の § で I)，II) の証明をやり，§3 で $x_0 \in S$ を与えたとき $G \cdot x_0$ が good orbit か否かを判定するためのいくつかの定理を証明付きで述べ，§4 で実際の計算例（木村による）を示そう．

## §2. 主定理の証明

前§のおわりに述べたことをまとめると

> **主定理.** $(G, V)$ を $G$ が reductive で singular set $S$ が既約超曲面である概均質ベクトル空間とする. $x_0 \in S$ について
>
> i) $(G_{x_0}, V^*_{x_0})$ は概均質ベクトル空間である.
>
> ii) $T^*_{G\cdot x_0}V \subset W$
>
> iii) $\mathrm{tr}_{V_{x_0}} A$ と $\delta\chi(A)$ の比が $A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ のとり方によらず一定である. (但し $\delta\chi(A) \neq 0$ とする)
>
> の三条件が成り立てば $\left(s + \dfrac{\mathrm{tr}_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}\right) \Big| \, b(s)$ である.
>
> (M. Sato)

これを証明するには前§で述べたことにより P.6 の I), II) を証明すればよい.

まず I) を証明する.

$P(x, D) \in \mathcal{D}$ を $P(x, D) = P_m(x, D) + P_{m-1}(x, D) + \cdots + P_0(x, D)$,

$$P_j(x, D) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = j} \alpha_{j_1 \cdots j_n}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}$$

と表わしたとき $P_m(x, y)$ を $P(x, D)$ の principal symbol とよぶ.

( $P_\sigma(x, y)$ と表わすことにする. )

$\mathfrak{g}_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{tr} A = 0\}$ とおき $V \times V^*$ の alg. subset $\tilde{W}$, $W'$ を次のように定義する.

$$\tilde{W} \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* \mid \langle Ax, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}_0\}$$

$$W' \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) \in V \times V^* \mid P_\sigma(x, y) = 0 \text{ for } \forall P \in \mathcal{J}\}$$

そのとき

*Lemma* 1. $\widetilde{W} \supset W' \supset W$ が成り立つ.

∵) $\langle Ax, D \rangle \in \mathcal{J}$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_0$ ゆえ $\widetilde{W} \supset W'$ は明らか.

($\langle Ax, D \rangle$ の principal symbol は $\langle Ax, y \rangle$ である.)

さて $P(x, D) \in \mathcal{J}$ とすれば

$P(x, D) f^s = s^m P_m(x, \operatorname{grad} f(x)) f^{s-m} + s^{m-1}(\ \text{"}\ ) + \cdots = 0$

$s$ は parameter ゆえ $s$ の多項式として恒等的に成り立つから

$P_m(x, \operatorname{grad} f(x)) = 0$　$x \in V - S$ とすれば $f(x) \neq 0$ ゆえ $\dfrac{\varepsilon^m}{f(x)^m}$ を

掛ければ $P_m(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) = 0$ i.e. $P_\sigma(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) = 0$

∴ $W' \supset \{(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}$. 両辺の Zariski-closure をとって

$W' \supset W$ を得る. //

*Lemma* 2. 次の二つを仮定する.

i) $(G_{x_0}, V^*_{x_0})$ は P.V., すなわち その gen. pt. を $y_0$ とするとき

$$T^*_{G \cdot x_0} V = \overline{G(x_0, y_0)}$$

ii) $T^*_{G \cdot x_0} V \subset W = \overline{\{(x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) \mid x \in V - S\}}$

このとき $(x_0, y_0) \in W' \subset \widetilde{W}$ の近傍で $\widetilde{W}$ と $W'$ は一致する.

Proof)

*Lemma* 1 より $(x_0, y_0)$ の近傍で $W$ と $\widetilde{W}$ が一致することを

いえばよい. ( $(x_0, y_0) \in W$ をいうために仮定 ii) が必要なのである)

仮定 i) より $\dim \mathfrak{g} \cdot (x_0, y_0) = \dim \overline{G(x_0, y_0)} = n\ (= \dim V)$

(但し $A(x_0, y_0) = (Ax_0, {}^tAy_0)$ とする. $-{}^tAy_0$ とするべきだが $-y_0$ を考えれば同じ。$A \in \mathfrak{J}$ )　よって $\dim \mathfrak{J}_0 \cdot (x_0, y_0) \geqq n-1$ , すなわち $\exists A_1, \cdots, A_{n-1} \in \mathfrak{J}_0$ s.t. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1x_0 & \cdots & A_{n-1}x_0 \\ {}^tA_1y_0 & \cdots & {}^tA_{n-1}y_0 \end{pmatrix} = n-1$

従って $\widetilde{W}$ は $(x_0, y_0)$ の近傍で $2n-(n-1) = n+1$ 次元以下. 他方 $W \subset \widetilde{W}$ で $\dim W = n+1$ かつ $W$ は smooth ゆえ $(x_0, y_0)$ の近傍で $W$ と $\widetilde{W}$ は一致する. //

**Lemma 3**　$\mathcal{D} \supset \mathcal{J} \supset \widetilde{\mathcal{J}} = \mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_N$ とする. $\forall P \in \mathcal{J}$ に対し その principal symbol を $P_\sigma$ とするとき, $(x_0, y_0)$ の近傍で $P_\sigma(x, y) = \sum a_j(x, y) P_{j\sigma}(x, y)$ と表わせたとする. 但し $a_j(x, y)$ は $(x_0, y_0)$ の近傍で定義された holomorphic function, $P_\sigma(x, y), P_{j\sigma}(x, y)$ は $x$ に関して holomorphic で $y$ に関して多項式とする.　そのとき

$$\widetilde{\mathcal{J}}\Delta(x) = 0 \implies \mathcal{J}\Delta(x) = 0 \qquad \text{である.}$$

略証)

$J, \widetilde{J}$ を $\mathcal{J}, \widetilde{\mathcal{J}}$ に対応する ideal ( principal symbol の ) とするとき $\mathcal{O} \otimes J = \mathcal{O} \otimes \widetilde{J} \Rightarrow \mathcal{P} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{J} = \mathcal{P} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \widetilde{\mathcal{J}}$ を示せばよい. ( $\mathcal{O}$ は hol. func の sheaf, $\mathcal{P}$ は pseudo-differential operator の sheaf ).　$P = \sum_{k=-\infty}^{m} P_k(x, D) \in \mathcal{P} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{J}$ に対し $P_m(x, y) = R_m^1 P_{1\sigma} + \cdots + R_m^N P_{N\sigma}$ (但し $R_m^i$ は $P_{i\sigma}$ の階数を $l_i$ とするとき $m - l_i$ 階 ) ならば　$P - R_m^1(x, D) P_1(x, D) - \cdots - R_m^N(x, D) P_N(x, D) = P'$ は $(m-1)$ 階, 以下くり返して　$P = (\sum_{k=-\infty}^{m} R_k^1) P_1 + \cdots + (\sum_{k=-\infty}^{m} R_k^N) P_N$ を得る. これが Pseudo-diff. operator になっていることを示すには収束性の

check が必要だが略す. $P_i \Delta(x)=0 \ (1 \leq i \leq N)$ ならば

$P\Delta = (R^1P_1 + \cdots + R^NP_N)\Delta = 0$ を得る. //

Proposition 1. P.8 の Lemma 2 の仮定が成り立つとする.

microfunction $\Delta(x)$ が $(x_0, y_0)$ の近傍で

$$(\langle Ax, D\rangle + \alpha\, \delta\chi(A))\Delta(x) = 0 \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{g} \quad \text{ならば}$$

$$P(x, D, -\alpha)\Delta(x) = 0 \qquad \text{for } \forall P(x, D, s) \in \mathcal{J}[S]$$

Proof)

$\tilde{\mathcal{J}} = \{\langle Ax, D\rangle \mid A \in \mathfrak{g}_0\}$ とおいて Lemma 2 と Lemma 3

を使えば, Prop 1 の仮定から $P(x, D)\Delta(x) = 0$ for $\forall P(x, D) \in \mathcal{J}$

を得る. $A_0 \in \mathfrak{g}$ で $\delta\chi(A_0) = 1$ なるものをもってくる. ($S$ が

超曲面という仮定から $\delta\chi \neq 0$ がいえ, $A_0$ の存在が保証される.) 然らば

$$\begin{cases} \langle A_0x, D\rangle f^s = s\,\delta\chi(A_0) f^s = s f^s \\ \langle A_0x, D\rangle \Delta(x) = -\alpha\Delta(x) \end{cases} \quad \text{を得る.}$$

$$P(s, x, D)f^s = \sum P_j(x, D)s^j f^s = \sum P_j(x, D)\langle A_0x, D\rangle^j f^s = 0$$

$$\therefore \sum_j P_j(x, D)\langle A_0x, D\rangle^j \in \mathcal{J} \qquad \therefore \sum_j P_j(x, D)\langle A_0x, D\rangle^j \Delta(x)$$

$$= P(-\alpha, x, D)\Delta(x) = 0$$ //

注) $(x_0, y_0)$ の近傍で考えるという事は micro-local に考えるということ

に他ならない. よって microfunction や pseudo-diff. op. の概念が必要で

あるが, 主定理そのものを述べるのには (表面上) これらの概念はでてこない.

次にⅡ)の部分(P.6)を証明しよう.

Lemma 4. $G$ の homogeneous space $M = G/G_{x_0}$ $(x_0 \in M)$ に $G$-相対不変な volume element $\omega$ が存在する：$\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$

$\Updownarrow$

$G_{x_0}$ の $T_{x_0}M$ における表現の determinant が $G$ のある character $\chi$ の $G_{x_0}$ への制限になっている：$\det_{T_{x_0}M} g = \chi(g)$ for $\forall g \in G_{x_0}$

(i.e. リー環でいえば $\mathfrak{g}_{x_0}$ の $T_{x_0}M$ における表現の trace が $\mathfrak{g}$ の character $\delta\chi$ の $\mathfrak{g}_{x_0}$ への制限になっている.)

Proof)

$\Downarrow$) $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$ となる $M$ の volume element $\omega(x)$ が存在したとし，$x_0 \in M$ の近傍で局所座標により $\omega(x) = \rho(x)\underbrace{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}_{dx}$ と表わせたとする. $g \in G_{x_0}$ は $x_0$ を fix するから

$\omega(gx) = \rho(gx)d(gx)$ と表わせる. $gx = (\varphi^1(x), \cdots, \varphi^n(x))$ とすると

$d(gx) = \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x)\right)dx$, $gx_0 = x_0$ ゆえ

$\chi(g)\rho(x_0)dx\big|_{x_0} = \omega(gx)\big|_{x_0} = \rho(x_0)\cdot\det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right)dx\big|_{x_0}$

$\therefore \chi(g) = \det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right)$ for $g \in G_{x_0}$, $\det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)\right) = \det_{T_{x_0}M} g$ より

$\chi\big|_{G_{x_0}} = \det_{T_{x_0}M}$ を得る.

$\Uparrow$) $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g^{-1}} & M \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x = gx_0 & \longmapsto & x_0 \end{array}$ は $T_x M \xrightarrow{J_{g^{-1}}} T_{x_0}M$ を induce するが

これはまた更に $T^*_{x_0}M \xrightarrow{J^*_{g^{-1}}} T^*_{gx_0}M$ を与える.

$x_0 \in M$ における $n$-form を $\omega_0$ とする: $\omega_0 \in \overset{n}{\Lambda} T^*_{x_0}M$

そのとき
$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\Lambda} T^*_{x_0}M & \xrightarrow{(Jg^{*}_{-1})^n} & \overset{n}{\Lambda} T^*_{gx_0}M \\ \Psi & & \Psi \\ \omega_0 & \longmapsto & (\delta g^{-1})\omega_0 \end{array}$$
が得られる.

これで $M$ 上の $n$-form が一応つくれたが $gx_0 = g'x_0$ であっても $g \neq g'$ の可能性がある. そのとき $(\delta g^{-1})\omega_0 \neq (\delta g'^{-1})\omega_0$ となっては不都合.

しかしながら $G$ のある character $\chi$ があって $\chi|_{G_{x_0}} = \det_{T_{x_0}M}$ となっているならば, $\chi(g)(\delta g^{-1})\omega_0 = \chi(g')(\delta g'^{-1})\omega_0$ if $gx_0 = g'x_0$ がいえる. 実際 $x = gx_0 = g'x_0$ とすれば $g' = gg_1$, $g_1 \in G_{x_0}$ とおけるから $\chi(g_1)(\delta g_1^{-1})\omega_0 = \omega_0$ for $\forall g_1 \in G_{x_0}$ を示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi = g_1^{-1}} & M \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \quad (g_1 \in G_{x_0}) \text{ とすれば } \begin{array}{ccc} T_{x_0}M & \xrightarrow{(d\varphi)_{x_0} = Jg_1^{-1}} & T_{x_0}M \\ \Psi & & \Psi \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0} & \longmapsto & \sum \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_i}(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{x_0} \end{array} \text{ ゆえ}$$

$$\begin{array}{ccc} T^*_{x_0}M & \xrightarrow{(d\varphi)^*_{x_0}} & T^*_{x_0}M \\ \Psi & & \Psi \\ dx_i & \longmapsto & \sum \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x_0)dx_j \end{array} \text{ を得る.}$$
$\det\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)\right) = (\det_M g_1)^{-1}$ に注意すれば $(\delta g_1^{-1})\omega_0 = (\det_M g_1)^{-1}\omega_0$ となるから $\chi(g_1)\delta(g_1^{-1})\omega_0 = \omega_0$. ここで得られた $n$-form $\omega$ が $G$-相対不変である: $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$ //

Lem 4 の例.

余談) 例えば $G = SL(2, \mathbb{R})$ が $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に $x \overset{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}{\longmapsto} \frac{ax+b}{cx+d}$ と作用する場合を考える. このとき $G$-相対不変な volume element は存在しない.

実際 $\omega(x) = \rho(x)dx$ が $\omega(gx) = \chi(g)\omega(x)$ となれば $g = \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}$ を考えることにより $\rho(x) = e^{ax+b}$ の形. 他方 $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ を考えると $e^{-\frac{a}{x}+b}\frac{dx}{x^2} = \chi\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} e^{ax+b}dx$ 矛盾.

そして $\mathrm{tr}_{T_{x_0}M} A = 2a$ for $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ($x_0 = 0$ 原点), しかるに $\underset{\substack{\| \\ \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}}{\mathfrak{g}}$ の character $\delta\chi \equiv 0$.

Lemma 5. $x_0\in V$ を通る $G$-orbit $G\cdot x_0$ の上に $G$-相対不変な volume element $\omega$ $(\omega(gx)=\chi(g)\omega(x))$ が存在すれば $V$ 上の $G\cdot x_0$ に support をもつ超関数 $\Delta(x)$ で $G$-相対不変なものが存在する. $\left(\Delta(gx)=\dfrac{\chi(g)}{\det_V g}\Delta(x)\right)$

Proof)

distribution の言葉で説明する. $f'$ を $V_{\mathbb{R}}$ $(V=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V_{\mathbb{R}})$ 上の compact supported $C^\infty$-function とするとき

$$f'\longmapsto\int_{G\cdot x_0}f'|_{G\cdot x_0}\,\omega=\int_V f(x)\Delta(x)\,dx_1\cdots dx_n$$ は $G\cdot x_0$ に

support をもつ distribution $\Delta(x)$ を定義する. (これは algebraic hyperfunction である.)　これが $G$-相対不変なことを示そう.

$f'_g(x)=f'(gx)$ とおくと

$$\begin{array}{ccc}
\int_{G\cdot x_0}f'(x_1)\omega(x_1) & = & \int f'(x)\Delta(x)\,dx\\
\| & & \|\\
\int_{G\cdot x_0}f'_g(x_1)\omega(gx_1) & & \int f'_g(x)\Delta(gx)\,d(gx)\\
\| & & \|\\
\chi(g)\int_{G\cdot x_0}f'_g(x_1)\omega(x_1) & & \underline{(\det_V g)\int f'_g(x)\Delta(gx)\,dx}\\
\| & & \\
\underline{\chi(g)\int f'_g(x)\Delta(x)\,dx} & &
\end{array}$$

従って $\Delta(gx)=\dfrac{\chi(g)}{\det_V g}\Delta(x)$ を得る. //

Proposition 2. $x_0\in V$ における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ の元 $A$ のとり方によらず $\mathrm{tr}_{V_{x_0}}A$ と $\delta\chi(A)$ の比が一定であると

仮定する： $tr_{V_{x_0}} A = \alpha\, \delta\chi(A)$ for ${}^\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ （このとき $\alpha \in \mathbb{Q}$ となる） そのとき $G\cdot x_0$ に support をもつ（i.e. $f\Delta = 0$ if $x \in S$）$V$ 上の超関数 $\Delta(x)$ で $\{<Ax, grad> + \alpha\, \delta\chi(A)\}\Delta(x) = 0$ for ${}^\forall A \in \mathfrak{g}$ となるものがある．

Proof） $tr_{V_{x_0}} = tr_V - tr_{\mathfrak{g}\cdot x_0}$ （$\mathfrak{g}\cdot x_0 = T_{x_0} G\cdot x_0$）であるから仮定より $tr_{\mathfrak{g}_{x_0}} A = tr_V A - \alpha\, \delta\chi(A)$ for ${}^\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ を得る．群の言葉でいえば $\det_{T_{x_0} G x_0} g = (\det_V g)\cdot \chi(g)^{-\alpha}$ である．（すべて $G$ の universal covering group, $G\cdot x_0$ の covering space で考える）よって Lemma 4 により $G\cdot x_0$ 上に $\omega(gx) = (\det_V g)\cdot \chi(g)^{-\alpha}\omega(x)$ なる volume element が存在する．従って Lemma 5 により $\Delta(gx) = \frac{(\det_V g)\chi(g)^{-\alpha}}{\det_V g}\Delta(x) = \chi(g)^{-\alpha}\Delta(x)$ なる超関数 $\Delta(x)$ がある．この式を $t$（但し $g = \exp tA$, $A \in \mathfrak{g}$）に関して微分して $t=0$ とおくと $<Ax, grad>\Delta(x) = -\alpha\, \delta\chi(A)\Delta(x)$ を得る．//

以上で II）が証明され，結局 主定理（P.7）の証明が完了した．主定理の条件のうち i）と iii）は具体的に計算可能な量である．特に iii）の比が一定ということは

$$\frac{tr_{ad_{\mathfrak{g}_{x_0}}} A}{tr_V A} = \left(\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}\right)\frac{\deg f}{\dim V} - 1$$

が一定という事と同じで，これは $\mathfrak{g}_{x_0}$ を求めれば計算できる．しかし ii）はそのまゝでは わからない．

よって ii）が成り立つための条件を 次の §で 調べよう．

# §3. Singular orbit の conormal bundle が $W$ に含まれる為の条件

$x_0 \in S$ をとり　$x = x_0 + \varepsilon x'$ とおくとき

$f(x) = \varepsilon^k f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(\ast\ )$, $f_{x_0}(x') \not\equiv 0$ によって $f(x)$ の $x_0 \in V$ における localization $f_{x_0}(x')$ を定義する. $x'$ が勝手に動くとき $x$ もそうであるから このような $f_{x_0}$ は必ず存在する.

このとき $f_{x_0}$ が $k$ 次の斉次多項式であることは容易にわかる。

Lemma 1. 相対不変式 $f(x)$ の character を $\chi$ とするとき, $f$ の $x_0 \in V$ における localization $f_{x_0}$ は $G_{x_0}$ の作用に関して character $\chi$ に対応する相対不変式で, しかも $f_{x_0}(x') = f_{x_0}(x'')$ if $x' \equiv x''$ mod $\mathfrak{g} \cdot x_0$ が成り立つ. よって $f_{x_0}$ は $(G_{x_0}, V_{x_0})$ の相対不変式である.

Proof) $g \in G_{x_0}$, $x = x_0 + \varepsilon x'$ とすると, $g \cdot x = x_0 + \varepsilon g x'$ ゆえ

$$
\begin{aligned}
&f(gx) = \varepsilon^k f_{x_0}(gx') + \varepsilon^{k+1}(\ \text{〃}\ ) \\
&\ \ \shortparallel \\
&\chi(g) f(x) = \varepsilon^k \chi(g) f_{x_0}(x') + \varepsilon^{k+1}(\ast\ )
\end{aligned}
$$

両辺を $\varepsilon^k$ でわって $\varepsilon \to 0$ とすれば $f_{x_0}(gx') = \chi(g) f_{x_0}(x')$ を得る.

$\forall A \in \mathfrak{g}$ にたいし $\exp \varepsilon A \in G$ ゆえ

$$f(\exp \varepsilon A \cdot (x_0 + \varepsilon x')) = \exp \varepsilon\, \delta\chi(A) \cdot f(x_0 + \varepsilon x')$$

そして $\exp \varepsilon A \cdot (x_0 + \varepsilon x') = x_0 + \varepsilon \{(x' + A x_0) + \varepsilon(\ast\ )\}$ ゆえ

両辺を展開すれば　$\varepsilon^k f_{x_0}(x'+Ax_0)+\varepsilon^{k+1}(\cdot)=\varepsilon^k f_{x_0}(x')+\varepsilon^{k+1}(*)$

よって　両辺を $\varepsilon^k$ でわって $\varepsilon \mapsto 0$ とすれば

$$f_{x_0}(x'+Ax_0)=f_{x_0}(x') \quad (A\in\mathfrak{g}) \qquad //$$

Lemma 1 の Cor.　$(G_{x_0}, V_{x_0})$ が P.V. ならば，character $\chi$ に対応する相対不変多項式が定数倍を除いて唯1つ存在する．

∵）概均質ベクトル空間の相対不変式は character で定まることより．

☆ ここで大切な事は，もとの相対不変式の具体的な形を知らなくても，localization の具体的な形が　この Cor. から わかる場合が多いことである．

Lemma 2.　$(G, V)$ を勝手な（何も仮定しない）概均質ベクトル空間とする．$S$ をその singular set，$f$ を相対不変式の一つとする．そのとき　$V-S \xrightarrow{\text{grad}\log f} V^*$　(P.5 参照) が generically surjective (i.e. image の Zariski-closure が全体と一致) であることと $H_{\log f}$ (= Hessian of $\log f$) $\neq 0$ とは同値．$\deg f \geqq 2$ なら $H_f$ (= Hessian of $f$) $\neq 0$ と同値．

Proof)　$\varphi(x)=\text{grad}\log f(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x))\in V^*$ とおくと $\varphi_i(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\log f=\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ である．$f$ が相対不変式であることより $\exists x\in V-S$ s.t. $\det(d\varphi)_x\neq 0$ ならば $\forall x\in V-S$ につい

てもそうなる.（∵ $\det(d\varphi)_{gx} = (\det{}_V g)^{-2}\cdot\det(d\varphi)_x$ ）

$\det(d\varphi)_x = \det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\right) = \det\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\log f\right) = $ Hess. of $\log f$ ゆえ

前半は証明された. $r = \deg f > 1$ とすると

$$\det(d\varphi)_x = \det\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)\right) = \det\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x) - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ 0, & \cdots, & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}, & \cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}, & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}, & \cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}, & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n}, & 1 \end{vmatrix} \quad *$$

ところで Euler の恒等式により $\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} = (r-1)\frac{\partial f}{\partial x_i}$,

$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f = rf$ ゆえ

$$x_1\begin{bmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} \\ \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r-1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{r-1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ r \end{bmatrix}$$ 従って

$$* = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)\cdot\frac{1}{f(x)^n}\left(1-\frac{r}{r-1}\right)$$

$\therefore\ \det(d\varphi)_x = \frac{-1}{r-1}\cdot\frac{H_f(x)}{f(x)^n}$ $\quad\therefore\ \det(d\varphi)_x \neq 0 \Leftrightarrow H_f(x)\neq 0$ //

※ $\deg f = 1$ のときは $\det(d\varphi)_x \neq 0 \longleftrightarrow \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \neq 0$

> Proposition 1. $x_0 \in V$ に対し $(G_{x_0}, V_{x_0})$ が P.V. で $\dim V_{x_0} = 1$ であるか，または $\dim V_{x_0} \geqq 2$ で localization $f_{x_0}$ の Hessian $\neq 0$ ならば $T_{G^*_{x_0}}V \subset W \overset{\text{def}}{=} \overline{\{(x, \varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(x)) \mid x \in V - S\}}$

Proof)

$x = x_0 + \varepsilon x' \in V - S$ とする. $\mathrm{grad}_x \log f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log f(x_0 + \varepsilon x')$

$= \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log \varepsilon^k f_{x_0}(x')\{1 + \sum_{j\geq 1}\varepsilon^j h_j(x')\}$

$= \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log f_{x_0}(x') + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}_{x'} \log\{1 + \varepsilon\sum_{j\geq 1}\varepsilon^{j-1} h_j(x')\}$

従って

$W \ni (x, \varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(x)) = (x_0 + \varepsilon x', \mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}(x') + \mathrm{grad}_{x'}\log\{1 + \varepsilon(*)\})$

ここで $\varepsilon \mapsto 0$ とすれば，$W$ は closed ゆえ $(x_0, \mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}(x')) \in W$ を得る. さて $(G_{x_0}, V_{x_0})$ の singular set を $S_{x_0}$ とするとき $x' \in V_{x_0} - S_{x_0}$ なら $f_{x_0}(x') \neq 0$ ゆえ $f(x_0 + \varepsilon x') \neq 0$ ( 小 $\varepsilon \neq 0$). $S$ は超曲面であったから $x_0 + \varepsilon x' \in V - S$ がいえ，今のことより $\forall x' \in V_{x_0} - S_{x_0}$ に対して $(x_0, \mathrm{grad}_{x'}\log f_{x_0}(x')) \in W$ を得る. 仮定と Lemma 2 より

$V_{x_0} - S_{x_0} \xrightarrow{\mathrm{grad}\log f_{x_0}} V^*_{x_0}$ は generically surjective ゆえ

$(x_0, V^*_{x_0}) \subset W$. $\quad (gx, g^*\varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(x)) = (gx, \varepsilon\,\mathrm{grad}\log f(gx))$

ゆえ $(x, y) \in W$ なら $g(x, y) = (gx, g^*y) \in W$ がいえる. 従って

$(gx_0, g^* V^*_{x_0}) = (gx_0, V^*_{gx_0}) \subset W \quad \therefore T_{G^*_{x_0}}V \subset W$ //

注) $\dim V_{x_0} \geqq 2$ かつ $\deg f_{x_0} = 1$ なら $\mathrm{grad}\log f_{x_0}$ は gen. surj. にはならない. 更に

$(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P.V. になっていることもいえる. すなわち localization の Hessian が消えなければ good-orbit である.

Corollary: $x_0 \in V$ に対し $(G_{x_0}, V_{x_0})$ が既約正則概均質ベクトル空間なら $G \cdot x_0$ は good orbit である.

∵) 既約正則 P.V. の任意の相対不変多項式はその Hessian $\neq 0$ より //

☆ $G_{x_0} \hookrightarrow GL(V_{x_0})$ の image $\overline{G_{x_0}}$ が reductive で singular set $S_{x_0}$ が既約超曲面ならば good orbit であることがわかる.

$x_0 \in V$ における localization の Hessian $\neq 0$ なら good-orbit であることがわかったが, 次に Hessian $= 0$ になっている場合の判定法を考えよう.

$G$ が reductive と仮定しているから, $G$ の $V$ への作用と, その $V^*$ への反傾的な作用は互いに $G$ の自己同型 (内部とは限らぬ) でうつりあえる. すなわち $(G, V) \cong (G, V^*)$ as P.V. である. (すなわち $(G,V)$ と $(G,V^*)$ は同じものと考えることができる)

さて $x_0 \in V$ に対し $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が P.V. であると仮定するとその generic pt $y_0$ があるが, $G^* \cdot y_0$ を $V^*$ の orbit と考えて ($V = (V^*)^*$ と考える) conormal bundle $T_{G^* \cdot y_0}^* V^*$ $(\subset V \times V^*)$ を作ったとき, $T_{G \cdot x_0}^* V = T_{G^* \cdot y_0}^* V^*$ となることをまず示そう.

定義から $T^*_{G^*y_0}V^* = \{(x,y)\in V\times V^* \mid y\in G^*y_0,\ \langle x, \mathfrak{g}^* y\rangle = 0\}$

で $\langle x_0, \mathfrak{g}^* y_0\rangle = \langle \mathfrak{g} x_0, y_0\rangle = 0$ より $(x_0, y_0)\in T^*_{G^*y_0}V^*$.

conormal bundle は G 不変だから $T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0,y_0)} \subset T^*_{G^*y_0}V^*$

$\dim G(x_0,y_0) = n$ ゆえ $V^*$の方からみて conormal vector space $(G_{y_0}, V^*_{y_0})$

は P.V. で $x_0\in (V^*_{y_0})^* \subset V$ が gen. pt. i.e. $T^*_{G^*\cdot y_0}V^* = \overline{G(x_0,y_0)}$

よって $T^*_{G\cdot x_0}V = \overline{G(x_0,y_0)} = T^*_{G^*\cdot y_0}V^*$ を得る.

このことから $V$ の orbit $G\cdot x_0$ と $V^*$ の orbit $G^*\cdot y_0$ が対応する事がわかる。 $(G,V)$ と $(G,V^*)$ を同一視すれば $G^*\cdot y_0$ は $V$ のある orbit $G\cdot x_0'$ と同一視できる。 このとき $G\cdot x_0$ と $G\cdot x_0'$ は互いに conormal bundle で対応する orbits という.

**Proposition 2.** $G\cdot x_0$ と $G\cdot x_0'$ を conormal bundle で対応する orbits とすれば

$$T^*_{G\cdot x_0}V \subset W \iff T^*_{G\cdot x_0'}V \subset W$$

Proof) 上に述べた議論から $W\subset V\times V^*$ が $V$ と $V^*$ に関して対称になっている事を示せば十分.

Lemma 3.

$$W = \overline{\{(x,y)\in V\times V^* \mid x\in V-S,\ y\in V^*-S^*,\ \langle \mathfrak{g}_0 x, y\rangle = \langle x, \mathfrak{g}_0^* y\rangle = 0\}}$$

($\overline{\phantom{x}}$ は Zariski-closure in $V\times V^*$)

Proof) $\subset$ の証明. $(G,V)$ は正則ゆえ $\operatorname{grad}\log f(x)\in V^*-S^*$ $(x\in V-S)$ よって $\forall\varepsilon$ に対して $\varepsilon \operatorname{grad}\log f(x)\in V^*-S^*$, そして

(1.3) より $\langle Ax, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x) \rangle = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_0 \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{tr} A = 0\}$

⊃ の証明：

$x \in V - S$, $y \in V^* - S^*$, $\langle \mathfrak{g}_0 x, y \rangle = 0$ とする.

$y_1 = \operatorname{grad} \log f(x)$ とおくと $\langle Ax, y_1 \rangle = \delta\chi(A) = 0$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_0$ ゆえ

もし $\langle x, y_1 \rangle = 0$ とすると $\langle \mathfrak{g} x, y_1 \rangle = \langle V, y_1 \rangle = 0$ より $y_1 = 0$

他方 $y_1 \in V^* - S^*$ ゆえ矛盾. よって $\langle x, y_1 \rangle \neq 0$. $\varepsilon = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle x, y_1 \rangle}$ と

おくと $\langle \mathfrak{g}_0 x, y - \varepsilon y_1 \rangle = \langle V, y - \varepsilon y_1 \rangle = 0$

$$\therefore\ y = \varepsilon y_1 = \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x) \qquad //$$

このことから Prop 2 が証明された.

多くの場合 Prop 1 と Prop 2 によって conormal bundle が $W$ に含まれることが証明できるが, Prop 1 と Prop 2 の条件がともに成り立たない場合, すなわち conormal bundle で対応する orbits の localization の Hessian が両方とも消えてしまう場合でも, conormal bundle が $W$ に含まれる事を証明できるときがある.

$x_0 \in S$ における localization が $x_n^k$ という形をしている場合を考えよう. すなわち $f(x_0 + \varepsilon x) = \varepsilon^k \cdot c\, x_n^k + \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x) + \cdots + \varepsilon^{\deg f} f(x)$.

$\dim V_{x_0} \geqq 2$ とすれば, 明らかに $\operatorname{Hess} f_{x_0} = 0$ である.

ここで $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$ なる形のものに制限して考えても

$f(x_0 + \varepsilon x') \not\equiv 0$ である. 実際 $\{x \in V \mid f(x) = 0\} \cap \{x \in V \mid x_n = x_{0n}\} \neq \phi$

( $G$ reductive, $S$ 既約超曲面, $\dim V \geqq 2$ という仮定から $\mathrm{Hess}\, f \neq 0$, 特に $\deg f \geqq 2$, $f$ 既約 がいえるから )

$V^{(1)} = \{ x \in V \mid (x - x_0)_n = 0 \}$ または その $V_{x_0}$ への image を $V_{x_0}^{(1)}$ と記す事にすると $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ には character $\chi$ に対応する相対不変式が存在する. 特に $(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)})$ が概均質ならば, それは定数倍を除いて unique である。それは明らかに $(k+1)$ 次以上であるが, 特に $(k+1)$ 次になっている場合を考えよう。 すなわち

$$f(x_0 + \varepsilon x') = \varepsilon^{k+1} f_{x_0}^{(1)}(x') + \varepsilon^{k+2}(\cdots), \quad f_{x_0}^{(1)}(x') \neq 0, \quad x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$$

そこで $x = (x', x_n)$ とおき $f_{x_0}^{(1)}(x) = f_{x_0}^{(1)}(x', x_n)$ を $x_n$ に関して Taylor 展開すると

$f_{x_0}^{(1)}(x) = f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + f_{x_0}^{(1)\prime}(x', 0) \cdot \dfrac{x_n}{1!} + \cdots$ となる。但し $'$ は $x_n$ による微分を表わす。 よって $x = (x', x_n)$ とするとき

$$\mathrm{grad}_x f_{x_0}^{(1)}(x) = \left( \begin{array}{c} \mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', x_n) \\ \hline \frac{\partial}{\partial x_n} f_{x_0}^{(1)}(x', x_n) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + x_n(*) \\ \hline f_{x_0}^{(1)\prime}(x', 0) + x_n(**) \end{array} \right)$$

となる.

一般に $x \in V - S$ に対し $\varphi(x) = \mathrm{grad} \log f(x) \left( = \dfrac{\mathrm{grad} f(x)}{f(x)} \right)$ とおけば $\forall \varepsilon > 0$ に対して $(x, \varepsilon\varphi(x)) \in W$ となる事に注意しよう.

$$\mathrm{grad} f(x_0 + \varepsilon x) = \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{grad}_x f(x_0 + \varepsilon x)$$

$$= \varepsilon^{k-1} \cdot c_k \cdot x_n^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^k \left( \begin{array}{c} \mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}^{(1)}(x', 0) + x_n(*) \\ \hline f_{x_0}^{(1)\prime}(x', 0) + x_n(**) \end{array} \right) + \varepsilon^{k+1}(***)$$

従って

$$\varepsilon\varphi(x_0+\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^k\cdot C\cdot k\cdot x_n^{k-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \varepsilon^{k+1}\left(\begin{array}{c}\mathrm{grad}_{x'} f_{x_0}(x',0)+x_n(*)\\ \hline f^{(1)}_{x_0}{}'(x',0)+x_n(**)\end{array}\right) + \varepsilon^{k+2}(***)}{\varepsilon^k\cdot C\cdot x_n^k + \varepsilon^{k+1} f^{(1)}_{x_0}(x) + \varepsilon^{k+2}(\cdots)}$$

特に $x=\begin{pmatrix}x'\\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}x_n\end{pmatrix}$ $(k\geq 2)$ とおくと

$$\varepsilon\varphi\left(x_0+\varepsilon\begin{pmatrix}x'\\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}x_n\end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{array}{c}\mathrm{grad}_{x'} f^{(1)}_{x_0}(x',0)+\varepsilon(*)\\ \hline C\cdot k\cdot x_n^{k-1}+f^{(1)}_{x_0}(x',0)+\varepsilon(*)\end{array}\right)}{f^{(1)}_{x_0}(x',0)+\varepsilon^{\frac{1}{k-1}}(*\ \varepsilon\text{の負巾の項なし})} \quad \text{ゆえ}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\varphi\left(x_0+\varepsilon\begin{pmatrix}x'\\ \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}x_n\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{c}\mathrm{grad}_{x'}\log f^{(1)}_{x_0}(x',0)\\ \hline x_n^{k-1}\cdot C\cdot k\cdot \frac{1}{f^{(1)}_{x_0}(x',0)}\end{array}\right) \quad (k\geq 2)$$

すなわち
$$\left(x_0,\ \left(\begin{array}{c}\mathrm{grad}_{x'}\log f^{(1)}_{x_0}(x',0)\\ \hline x_n^{k-1}\cdot C\cdot k\cdot \frac{1}{f^{(1)}_{x_0}(x',0)}\end{array}\right)\right)\in W \quad (\because W\ \text{closed})$$

ここで $x_n$ は任意にとれる(但し $k\geq 2$ と仮定)から $\mathrm{grad}_{x'}\log f^{(1)}_{x_0}(x',0)$ が generically surjective なら (i.e. $(G_{x_0}, V^{(1)}_{x_0})$ の $\chi$ に対応する相対不変式が $(k+1)$ 次でかつ Hessian $\neq 0$) $(x_0, V^*_{x_0})\subset W$, $\therefore\ T^*_{G\cdot x_0}V\subset W$ がいえる。 以上をまとめて

> **Proposition 3.** $x_0\in V$ における localization $f_{x_0}$ が $x_n^k$ $(k\geq 2)$ の形で、$V^{(1)}_{x_0}=\{x\in V_{x_0}\mid x_n=0\}$ とおくとき $(G_{x_0}, V^{(1)}_{x_0})$ が概均質で、$\chi$ に対応する相対不変式の次数が $(k+1)$ 次、かつ その Hessian $\neq 0$ とする。そのとき $T^*_{G\cdot x_0}V\subset W$ である。

## §4. GL(7)の3次skew-tensor表現 (GL(7), 目)の$b$-関数

以上の理論を実際の空間に適用して$b$-関数を計算してみよう。既約正則なP.V. $\underset{目}{GL(7)}$ を例にとろう。

$\underset{\square}{GL(7)}$ のbaseを $u_1,\dots,u_7$ とするとき (GL(7), 目) は $u_i\wedge u_j\wedge u_k$ $(1\le i<j<k\le 7)$ をbaseとする35次元の空間である。

orbitsは全部で10ヶある。([ ]参照) その代表点と次元を列挙すると

I) $0$ (0次元), II) $u_1\wedge u_2\wedge u_3$ (13次元), III) $u_1\wedge(u_2\wedge u_4+u_3\wedge u_5)$ (20次元) IV) $u_1\wedge(u_2\wedge u_5+u_3\wedge u_6+u_4\wedge u_7)$ (21次元)

V) $u_1\wedge u_2\wedge u_6+u_2\wedge u_3\wedge u_4+u_3\wedge u_1\wedge u_5$ (25次元)

VI) $u_1\wedge u_2\wedge u_3+u_4\wedge u_5\wedge u_6$ (26次元)

VII) $u_2\wedge u_3\wedge u_4+u_1\wedge(u_2\wedge u_5+u_3\wedge u_6+u_4\wedge u_7)$ (28次元)

VIII) $u_1\wedge u_3\wedge u_4+u_2\wedge u_5\wedge u_6+u_1\wedge u_2\wedge u_7$ (31次元)

IX) $u_2\wedge u_3\wedge u_5+u_3\wedge u_4\wedge u_6+u_1\wedge u_2\wedge u_7-u_1\wedge u_4\wedge u_5$ (34次元)

X) $u_2\wedge u_3\wedge u_4+u_5\wedge u_6\wedge u_7+u_1\wedge(u_2\wedge u_5+u_3\wedge u_6+u_4\wedge u_7)$ (35次元)

ここで I)〜IX) が singular orbits である。

代表点は isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_{x_0}$ が標準形になるようにとってある。相対不変式は7次式である。([ ],[ ]参照)

各々のorbitsを調べてみよう。

I) 0次元

ここでは $G_{x_0}=G$, $V_{x_0}=V$, $V_{x_0}^*=V^*$ ゆえ P.19 の Cor. より good orbit である事がわかる。

(1.1) より $\dfrac{\mathrm{tr}_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)}=\dfrac{\mathrm{tr}_V A}{\delta\chi(A)}=\dfrac{\dim V}{\deg f}$ 従って この orbit からは $b(s)$ の因子 $\left(s+\frac{\dim V}{\deg f}\right)=\left(s+\frac{35}{7}\right)=(s+5)$ が得られる.

注) 既約正則概均質ベクトル空間に対しては 原点と $\left(s+\frac{\dim V}{\deg f}\right)$ が常に対応する.

$(G, V^*)$ の generic pt. は $V$ の gen. pt. でもあるから conormal bundle による対応 (P.20) は I) $\longleftrightarrow$ X) である.

II) 13次元

$$G_{x_0}\sim(SL(3)\times GL(4))\cdot(G_a)^{12}$$ であり

$(G_{x_0}, V_{x_0})$ は $V_{x_0}$ の base $\omega_1,\cdots,\omega_{22}$ を適当にとれば

$$(\omega_1,\cdots,\omega_{22})\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}SL(3)\times GL(4)\\ \square\otimes\boxminus\end{matrix} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix}GL(4)\\ \boxminus\end{matrix}\end{array}\right)\begin{matrix}\}\,18\\ \}\,4\end{matrix}$$ となる.

$\dfrac{\mathrm{tr}_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)}=4$ for $\forall A\in\mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $(s+4)$ と対応する. good orbit になることは conormal bundle で II) $\longleftrightarrow$ IX) と対応すること (これは IX) の方から調べると容易) 及び §3 の Prop 1 (IX) の codim $=1$) と Prop 2 より得られる. $\deg f_{x_0}=5$ である.

III) 20次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times Sp(2)\times GL(2))\cdot U(14)$$

注) $U(m)$ は $m$ 次元 unipotent 群 の意味

$\omega_1=\frac{1}{2}(u_2\wedge u_4\wedge u_6-u_3\wedge u_5\wedge u_6)$, $\omega_2=u_2\wedge u_3\wedge u_6$, $\omega_3=u_2\wedge u_5\wedge u_6$

$\omega_4=u_3\wedge u_4\wedge u_6$, $\omega_5=u_4\wedge u_5\wedge u_6$, $\omega_6=\frac{1}{2}(u_2\wedge u_4-u_3\wedge u_5)\wedge u_7$

$\omega_7=u_2\wedge u_3\wedge u_7$, $\omega_8=u_2\wedge u_5\wedge u_7$, $\omega_9=u_3\wedge u_4\wedge u_7$, $\omega_{10}=u_4\wedge u_5\wedge u_7$, $\omega_{11}=u_1\wedge u_6\wedge u_7$

$\omega_{12}=u_2\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_{13}=u_3\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_{14}=u_4\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_{15}=u_5\wedge u_6\wedge u_7$ は

$V_{x_0}$ ($V_{x_0}^*$) の base であり $(G_{x_0}, V_{x_0})$ は

$$(\omega_1,\cdots,\omega_{15})\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}GL(1)\times Sp(2)\times GL(2)\\ \text{□□}\otimes\text{日}\otimes\text{□}\end{matrix} & 0 & \times \\ \hline 0 & \begin{matrix}GL(1)\times GL(2)\\ \text{□□}^*\otimes\text{日}\end{matrix} & \times \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}GL(1)\times Sp(2)\times GL(2)\\ \text{□}\otimes\text{□}\otimes\text{日}\end{matrix}\end{array}\right)$$

の形をしており $V_{x_0}\ni x=\sum_{i=1}^{15}x_i\omega_i$ とすると, localization $f_{x_0}$ は

$$\begin{aligned}f_{x_0}(x)=&(x_1x_7-x_2x_6)x_{14}x_{15}+(x_1x_9-x_4x_6)x_{12}x_{15}-(x_2x_9-x_4x_7)x_{15}^2\\&-(x_4x_{10}-x_5x_9)x_{12}^2-(x_2x_{10}-x_5x_7)x_{12}x_{14}+(x_1x_{10}-x_5x_6)x_{12}x_{13}\\&-(x_2x_{10}-x_5x_7)x_{13}x_{15}+(x_2x_8-x_3x_7)x_{14}^2-(x_3x_9-x_4x_8)x_{12}x_{14}\\&-(x_1x_8-x_3x_6)x_{13}x_{14}+(x_3x_9-x_4x_8)x_{13}x_{15}+(x_3x_{10}-x_5x_8)x_{13}^2\end{aligned}$$

となる。 $\frac{\partial}{\partial x_{11}}f_{x_0}=0$ ゆえ $\mathrm{Hess}\,f_{x_0}=0$ となる.

しかし conormal bundle で III) $\leftrightarrow$ VIII) が対応し (これも VIII の方から調べるのが容易) VIII が good orbit であるから §3 の Prop 2 により good orbit であることがわかるが, $\frac{\mathrm{tr}_{V_{x_0}}A}{\delta\chi(A)}$ ($A\in\mathfrak{g}_{x_0}$) は一定にならない.

IV) 21次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times Sp(3))\cdot(G_a)^6$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \underset{\square\square\square\ \otimes\ 目}{GL(1)\times Sp(3)}$ は 既約正則概均質ベクトル空間

ゆえ P.19 の Cor. より IV) は good orbit である.

$\dfrac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = \dfrac{7}{2}$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $(s+\frac{7}{2})$ と対応する.

conormal bundle による対応は IV) $\longleftrightarrow$ VI) である.

V) 25次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times GL(1)\times SL(3))\cdot U(14)$$

$\omega_1 = u_4\wedge u_5\wedge u_6$, $\omega_2 = u_1\wedge u_4\wedge u_7$, $\omega_3 = u_2\wedge u_5\wedge u_7$, $\omega_4 = u_3\wedge u_6\wedge u_7$,

$\omega_5 = (u_1\wedge u_5 + u_2\wedge u_4)\wedge u_7$, $\omega_6 = (u_2\wedge u_6 + u_3\wedge u_5)\wedge u_7$, $\omega_7 = (u_1\wedge u_6 + u_3\wedge u_4)\wedge u_7$

$\omega_8 = u_4\wedge u_5\wedge u_7$, $\omega_9 = u_5\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_{10} = u_4\wedge u_6\wedge u_7$ が $V_{x_0}$, または $V_{x_0}^*$ の base であり $(G_{x_0}, V_{x_0})$ を この base で表現すると

$$(\omega_1, \cdots, \omega_{10})\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}GL(1)\times GL(1)\times SL(3)\\ \square\square\square\square^*\otimes 1\otimes 1\end{matrix} & 0 & \times \\ \hline 0 & \begin{matrix}GL(1)\times GL(1)\times SL(3)\\ \square^*\otimes\square\otimes\square\square\end{matrix} & \times \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}GL(1)\times GL(1)\times SL(3)\\ \square\square\square^*\otimes\square\otimes 日\end{matrix}\end{array}\right)$$

$x = \sum_{i=1}^{10} x_i\omega_i$ とすれば

$$f_{x_0}(x) = 2(x_5x_9x_{10} + x_6x_8x_{10} - x_7x_8x_9) - (x_4x_8^2 - x_2x_9^2 - x_3x_{10}^2)$$

で $\frac{\partial}{\partial x_1} f_{x_0} = 0$ ゆえ Hess $f_{x_0} = 0$ となってしまう. $\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)}$ は一定にならない.

conormal bundle で V) $\longleftrightarrow$ VII) が対応する.

VI) $^{26}$次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times SL(3)\times SL(3))\cdot(G_a)^6$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \underset{\square\otimes\square\otimes\square}{GL(1)\times SL(3)\times SL(3)}$ は 既約正則 P.V. ゆえ VI) は good orbit である. ( $\deg f_{x_0} = 3$ )

$\dfrac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = 3$ for $\forall A \in \mathfrak{g}_{x_0}$ ゆえ $(s+3)$ と対応する.

conormal bundle による対応 は VI) ↔ IV) である.

VII) 28次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times SL(3))\cdot U(12)$$

$\omega_1 = (u_2\wedge u_5 - u_3\wedge u_6)\wedge u_7$, $\omega_2 = (u_3\wedge u_6 - u_4\wedge u_7)\wedge u_5$

$\omega_3 = (u_2\wedge u_5 - u_4\wedge u_7)\wedge u_6$, $\omega_4 = u_2\wedge u_6\wedge u_7$, $\omega_5 = u_4\wedge u_5\wedge u_6$, $\omega_6 = u_3\wedge u_5\wedge u_7$

$\omega_7 = u_5\wedge u_6\wedge u_7$ が $V_{x_0}$ ( or $V_{x_0}^*$ ) の base で, $(G_{x_0}, V_{x_0})$

は $(\omega_1, \cdots, \omega_7)\left[\begin{array}{c|c} \underset{\square\!\square^*\otimes\square\!\square}{GL(1)\times SL(3)} & \begin{matrix} \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times \end{matrix} \\ \hline 0 & \underset{\square\!\square^*}{GL(1)} \end{array}\right]$

で $f_{x_0}(x) = x_7^2$ $\left(x = \sum_{i=1}^{7} x_i\omega_i\right)$ である.

$V_{x_0}^{(1)} = \{\sum x_i\omega_i \mid x_7 = 0\}$ には $G_{x_0}$ が作用するが

$(G_{x_0}, V_{x_0}^{(1)}) = \underset{\square\!\square^*\otimes\square\!\square}{GL(1)\times SL(3)}$ で $\chi$ に対応する相対不変式は

3次式, かつ その Hessian $\neq 0$ ( ∵ $GL(3)_{\square\!\square}$ は既約正則 P.V. )

よって P.23 の Prop 3 により $T^*_{G\cdot x_0}V \subset W$ がいえる. そして明らか

に $(G_{x_0}, V_{x_0}^*)$ は P.V. ( $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ が gen. pt. ) ゆえ good orbit で $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ は V) に属するから conormal bundle による対応は V) ⟷ VII).

$\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} (A \in \mathfrak{g}_{x_0}) = \frac{5}{2}$ ゆえ $(s+\frac{5}{2})$ と対応する。

VIII) 31次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times GL(1)\times SL(2)\times SL(2))\cdot U(10)$$

$(G_{x_0}, V_{x_0}) = \begin{array}{c} GL(1)\times GL(1)\times SL(2)\times SL(2) \\ \square\!\square\!\square \otimes \square\!\square\!\square \otimes \square \otimes \square \end{array}$ は既約正則 P.V. ゆえ good orbit である。

そして $\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} (A \in \mathfrak{g}_{x_0}) = 2$ ゆえ $(s+2)$ と対応する。

conormal bundle による対応は VIII) ⟷ III) である。

IX) 34次元

$$G_{x_0} \sim (GL(1)\times SL(2)\times SL(2))\cdot (G_a)^8$$

$\dim V_{x_0} = 1$ ゆえ §3 の Prop 1 より good orbit である。

$\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = 1 \; (A \in \mathfrak{g}_{x_0})$ ゆえ $(s+1)$ と対応する。conormal bundle による対応は IX) ⟷ II) である。

注) $(G, V)$ 既約正則 P.V. なら codim 1 の orbit からは常に $(s+1)$ がでてくる。すなわち $\frac{tr_{V_{x_0}} A}{\delta\chi(A)} = 1 \; (A \in \mathfrak{g}_{x_0})$. 他方 $\delta\chi(A) = \frac{\deg f}{\dim V} tr_V(A)$ だったから このことより $\deg f = \frac{tr_{V_{x_0}} A}{tr_V A} \dim V$ ($A \in \mathfrak{g}_{x_0}$, $x_0$ は codim 1 の orbit の点) が得られる。これがいわゆる次数公式である。

ついでに X) における isotropy subgroup について述べておくと $G_{x_0} \sim (G_2)$、 従って $GL(7)/(G_2) \sim V - S$ は松島の定理により affine variety になり, 従って S は超曲面であることがわかる. GL(7) は既約表現ゆえ S は既約超曲面になることが証明され, 我々の仮定 (P.1) が満たされていることがわかる.

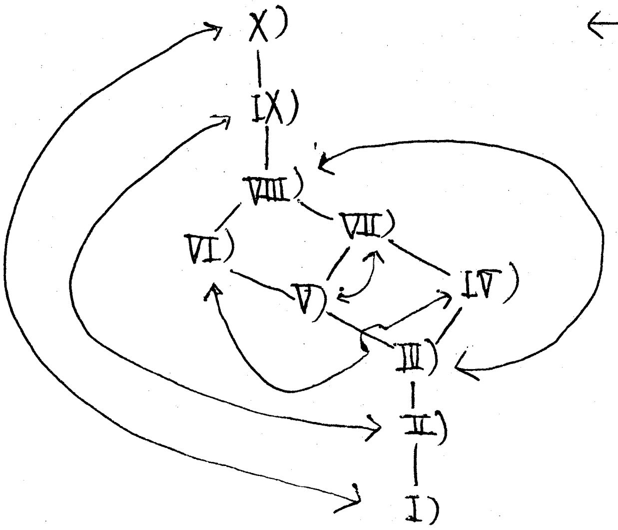
注) $(G_2)$ は rank 2 の例外群

$\deg b(s) = \deg f = 7$ が知られているから, 以上で $b(s)$ が完全に求まった. すなわち

$$\boxed{b(s) = (s+1)(s+2)(s+\tfrac{5}{2})(s+3)(s+\tfrac{7}{2})(s+4)(s+5)}$$

Singular orbits との対応は I) $\leftrightarrow (s+5)$, II) $\leftrightarrow (s+4)$, III) $\leftrightarrow$ X (ナシ), IV) $\leftrightarrow (s+\frac{7}{2})$, V) $\leftrightarrow$ X (ナシ), VI) $\leftrightarrow (s+3)$, VII) $\leftrightarrow (s+\frac{5}{2})$, VIII) $\leftrightarrow (s+2)$, IX) $\leftrightarrow (s+1)$ であった.

orbits の closure による包含関係は下図のようになっている.




$\longleftrightarrow$ は Ep は conormal bundle による対応を表わす.

注) この例ではすべて good orbit であったが $T_{Gx_0}V \not\subset W$ となるような概均質ベクトル空間の例もある.